Μαθημα: 3ο 15/11/2019

Θεωρία Γραφημάτων

- Βαθμοί κορυφών: $deg_G(v) = |N_G(v)|$
- $\delta(G)$: ελάχιστος βαθμός
- $\Delta(G)$: μέγιστος βαθμός
- $d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} deg(v)$: μέσος βαθμός
- $\varepsilon(G) = \frac{m}{n}$
- απομονωμένη κορυφή → βαθμού 0
- εκκρεμής κορυφή → βαθμού 1
- καθολική κορυφή → βαθμού n-1 //

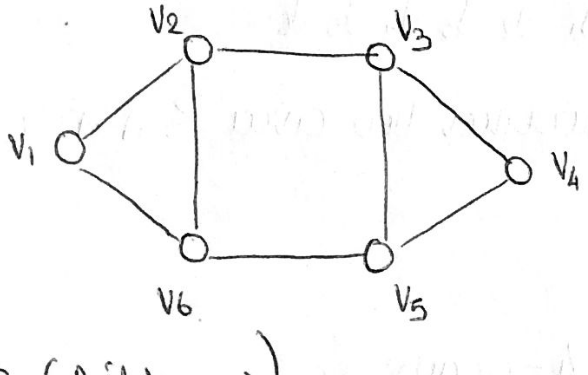
Θεώρημα: 1. $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2m$ → δηλ. καθε ακμή δίνει 2 φορές απο έναν βαθμό

2. $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$

3. $\varepsilon(G) = \frac{d(G)}{2}$

Λήμμα: Καθε γράφημα περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού

π.χ. έστω γράφημα 6-κορυφών.



βαθμός καθε κορυφής ↑ ακμές

$2 + 3 + 3 + 2 + 3 + 3 = 16 = 2 \cdot 8$

εχ.

Αποδ (Λήμματος)

Έστω $V(G) = V_1 \cup V_2$ όπου V_1 με περιττό βαθμό
V_2 με άρτιο βαθμό

Γνωρίζουμε: $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v) = \underline{άρτιο} = 2m$

↑ άρτιο

Αναγκαστικά και το $\sum_{v \in V_1} deg(v)$ είναι άρτιο για να έχω άρτιο αποτέλεσμα

Γραφική Ακολουθία ! εξ. → Άσκηση

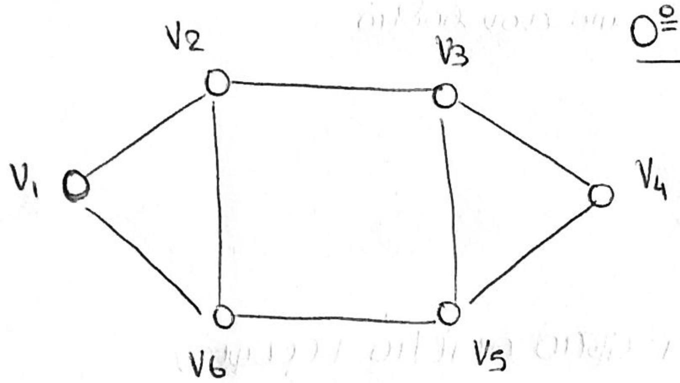
→ βαθμοί κορυφών.

Ορισμός: Μια φθίνουσα ακολουθία $\gamma = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ όπου $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, καλείται γραφική αν $\exists$ γράφημα G με n κορυφές $v_1, \dots, v_n$ και βαθμούς $d_1, \dots, d_n$ αντίστοιχα.
Το γράφημα αυτό θα λέμε ότι πραγματοποιεί την ακολουθία γ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- $\forall\, i = 1, \dots, n$ ισχύει $0 \leq d_i \leq n-1$ (*)
- Το πλήθος των περιττών d_i είναι άρτιου αριθμού (**) //.

Άσκηση: Δοθέντος ενός γραφήματος, ελέγξτε εάν είναι γραφική.



0ο βήμα: Εύρεση βαθμών κάθε κορυφής

$\deg(v_1) = 2$
$\deg(v_2) = 3$
$\deg(v_3) = 3$
$\deg(v_4) = 2$
$\deg(v_5) = 3$
$\deg(v_6) = 3$

1ο βήμα: ταξινόμηση των βαθμών των κορυφών (κατά φθίνουσα σειρά)

$$\gamma = \langle 2,3,3,2,3,3 \rangle = \langle \underset{d_1}{3}, \underset{d_2}{3}, \underset{d_3}{3}, \underset{d_4}{3}, \underset{d_5}{2}, \underset{d_6}{2} \rangle$$

(*) **2ο βήμα**: Ελέγχω εάν ο βαθμός των κορυφών μου είναι $\leq n-1 = 6-1 = 5$
→ εδώ είναι ✓

(**) **3ο βήμα**: $\gamma = \langle \underbrace{3,3,3,3}, 2, 2 \rangle$
↳ έχω 4 τριάρια ⇒ 4 = άρτιος ✓.

Άρα, είναι γραφική //.

π.χ. Η $\gamma' = \langle 1,1,1 \rangle$ → <u>ΔΕΝ</u> είναι γραφική ακολουθία γιατί το πλήθος των περιττών είναι 3, άρα περιττό

↓ ΔΕΝ ∃ τέτοιο γράφημα

π.χ. Η $\gamma = \langle 1,1,1,1 \rangle$ → <u>είναι</u> γραφική ακολουθία από βαθμούς κορυφών.

↓ είναι το γράφημα

→ 4 κορυφές με βαθμό 1

άρα οι βαθμοί πρέπει να είναι $\leq n-1 = 4-1 = 3$

$1 \leq 3$ → ισχύει

<u>Άσκηση</u>: Είναι η ακολουθία $\gamma = \langle 5,4,4,3,2,1,1 \rangle$ γραφική;

<u>Λύση</u>: <u>1ο βήμα</u>: Ταξινόμηση της γ κατά φθίνουσα σειρά

$\gamma = \langle 5,4,4,3,2,1,1 \rangle$, $n=7$

→ ΔΕΝ χρειάζεται εδώ αυτό το βήμα

<u>2ο βήμα</u>: ισχύει ότι $0 \leq$ βαθμοί $\leq n-1 = 7-1 = 6$

<u>3ο βήμα</u>: πλήθος περιττών = 4 (= άρτιος αριθμός)

Άρα, η γ είναι γραφική ακολουθία.

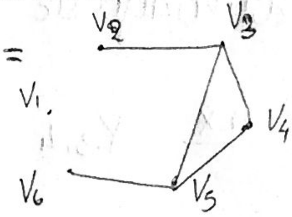
→ <u>Μετατροπή της ακολουθίας σε φθίνουσα</u>:

όταν σβήνω το 5, στις επόμενες 5 κορυφές μειώνεται ο βαθμός τους κατά 1.

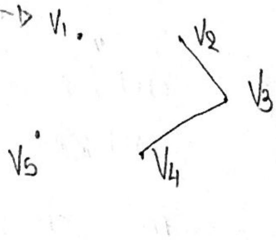
άρα εφόσον έχω την ακολουθία μου φθίνουσα,

έχω $\gamma' = \langle 4-1, 4-1, 3-1, 2-1, 1-1, 1 \rangle =$

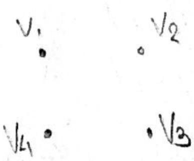
$= \langle 3,3,2,1,0,1 \rangle$ →



$\gamma'' = \langle 2,1,0,1,0 \rangle = \langle 2,1,1,0,0 \rangle$ → V1.

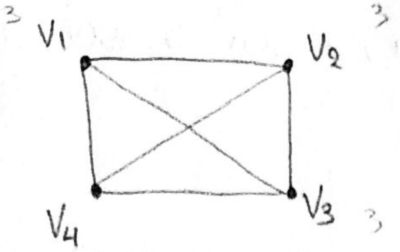


$\gamma''' = \langle 0,0,0,0 \rangle$ →



π.χ. Έστω K_4, νδ την γραφική ακολουθία του.

K_4



βαθμός = 3

$\gamma = \langle 3,3,3,3 \rangle$ με $0 \le d_i \le 3 = n-1 = 4-1$

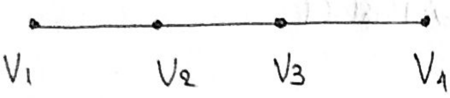
\+

πλήθος περιττών είναι άρτιο. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ είναι γραφική

π.χ. Έστω P_4, νδ την γραφική ακολουθία του.

P_4



$\gamma = \langle 2,2,1,1 \rangle$ με $0 \le d_i \le 3 = 4-1 = n-1$

\+

πλήθος περιττών είναι άρτιο $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ είναι γραφική //

ΔΙΜΕΡΗ ΓΡΑΦΗΜΑ

Διμερές γράφημα $G = (V, E)$:

$V(G) = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ και $\{x,y\} \in E(G) : x \in A, y \in B$

Τα σύνολα A, B ονομάζονται διαμέριση του G.

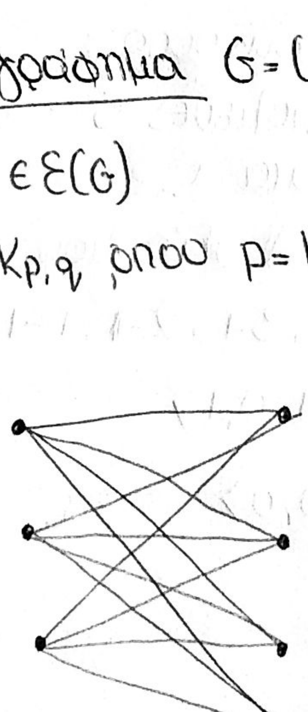
Συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα ως $G = (A, B, E)$

Πλήρες διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$

$\forall x \in A, y \in B : \{x,y\} \in E(G)$

Συμβολίζουμε με $K_{p,q}$, όπου $p = |A|$, $q = |B|$

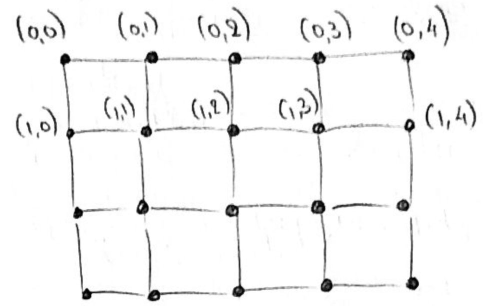
π.χ. $K_{3,4}$



ΠΛΕΓΜΑ

Έστω $X = \{x_1, \dots, x_p\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ $\Rightarrow R_{p,q} = \left(X \times Y, \{\{(x_i, y_j), (x_k, y_\ell)\} \,/\, |i-k| + |j-\ell| = 1\}\right)$

Π.χ. Το πλέγμα $R_{4,5}$:



Π.Χ. $R_{p,q} = \left(X \times Y, \{(x_i, y_j), (x_k, y_\ell)\} \,/\, |i-k| + |j-\ell| = 1\right)$

↳ Το γράφημα αντιστοιχεί σ' ένα επίπεδο δισδιάστατο πλέγμα

$V(R_{p,q})$: τομές των ευθυγράμμων τμημάτων του πλέγματος

$E(R_{p,q})$: τα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των κορυφών. //

Ορισμός: Το γραμμικό γράφημα

Το γραμμικό γράφημα ενός $G = (V, E)$ ορίζεται ως εξής:

$L(G) = \left(E(G), \{e, e'\} \,/\, e, e' \in E(G) \text{ και } e \cap e' \neq \emptyset\right)$.

Δηλ. οι κορυφές του $L(G)$ είναι οι ακμές του G και δύο κορυφές του $L(G)$ ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές έχουν κοινό άκρο. //

H.W.

Άσκηση: Βρείτε τις $\delta(G)$ και $\Delta(G)$ $\forall$ τιμή των $p, q \geq 1$ στις δύο περιπτώσεις:

1. $G \simeq K_{p,q}$
2. $G \simeq R_{p,q}$

$K_{3,1}$ $R_{4,5}$